<table>
<tr><th colspan="9">Gleichungssysteme und ihre Bedeutung für die Vektorrechnung</th></tr>
<tr><th colspan="3">1. Unterbestimmtes Gleichungssystem
Weniger Gleichungen als Variablen</th><th colspan="3">2. Gleichbestimmtes Gleichungssystem
Genauso viel Gleichungen wie Variablen</th><th colspan="3">3. Überbestimmtes Gleichungssystem
Mehr Gleichungen als Variablen</th></tr>
<tr><td colspan="3">Beispiel:
$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4$
$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 6$
Strategie: Eine Variable durch Einsetzungs-, Gleichsetzungs- oder Additionsverfahren eliminieren. Dann für eine der verbleibenden Variable zum Beispiel t einsetzen und alle Variablen in Abhängigkeit von t berechnen.
Siehe zuerst 1c.</td><td colspan="3">Beispiel:
$1\,x_1 + 3\,x_2 - 4\,x_3 = 1$
$3\,x_1 - 2\,x_2 + 1\,x_3 = 0$
$-1{,}5\,x_1 + 1\,x_2 - 0{,}5\,x_3 = 1$

Strategie: Lösen mit Matrizenschreibweise</td><td colspan="3">Beispiel:
$3\,x_1 + 2\,x_2 = 4$
$4\,x_1 + 8\,x_2 = 6$
$2\,x_1 + 8\,x_2 = 8$
Gesucht sind also zwei Variablen, die alle Drei Bedingungen erfüllen.
Strategie: Mit zwei Gleichungen die beiden Variablen ausrechnen. Dann die Probe mit der dritten Gleichung machen.</td></tr>
<tr><th>1.a
Keine Lösung</th><th>1.b
Eine Lösung</th><th>1.c
Unendlich viele Lösungen</th><th>2.a
Keine Lösung</th><th>2.b
Eine Lösung</th><th>2.c
Unendlich viele Lösungen</th><th>3.a
Keine Lösung</th><th>3.b
Eine Lösung</th><th>3.c
Unendlich viele Lösungen</th></tr>
<tr>
<td>$-3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 5$
$2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -2$

$-6x_1 + 12x_2 - 12x_3 = 10$
$6x_1 - 12x_2 + 12x_3 = -6$

Beide Gleichungen addiert.

$0 = 4$

Das ist eine unwahre Aussage, daher gibt es gar keine Lösung für dieses System.</td>
<td>Nicht möglich.

Aber bei der Lösung muss nicht unbedingt Bei jeder Variablen t stehen:

$-6x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 9$
$4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -6$

$-12x_1 - 6x_2 + 12x_3 = 18$
$12x_1 + 6x_2 - 15x_3 = -18$

$-12x_1 - 6x_2 + 12x_3 = 18$
$-15x_3 = 0$

In dem Fall ist $x_3 = 0$. Setze dann für $x_2 = t$.

Alles in die oberste Gleichung eingesetzt:
$-6x_1 - 3t + 6\cdot 0 = 9$
$x_1 = -1{,}5 - 0{,}5t$</td>
<td>$x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \mid \cdot(-2)$
$2x_1 - 4x_2 + x_3 = 6$

Hier Additions-verfahren:

$-2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -2$
$2x_1 - 4x_2 + x_3 = 6$

$-2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -2$
$2x_2 - x_3 = 4$

$-2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -2$
$2x_2 = x_3 + 4$

$-2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -2$
$x_2 = 0{,}5x_3 + 2$

Setze nun für $x_3 = t$.
Daraus folgt:
$x_2 = 0{,}5t + 2$
und mit der obersten Gleichung:
$x_1 - 3(0{,}5t + 2) + t = 1$
$x_1 - 1{,}5t - 6 + t = 1$
$x_1 - 0{,}5t = 7$
$x_1 = 7 + 0{,}5t$</td>
<td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1{,}5 & 1 & -0{,}5 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 9 & -12 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$
Addiert man Zeile II und III, erkennt man schon das Ergebnis:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 9 & -12 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

Da 0 = 2 eine falsche Aussage, ist das System nicht lösbar. Das wäre auch so, wenn z.B. stehen würde: 4 = 3. Vorsicht: Stünde hier 2 = 2 bedeutet das nicht, dass es unendlich viele Lsg. gibt, sondern dass $x_3 = 1$ ist. Bei Einsetzungs-verfahren, … ist das anders.</td>
<td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 5 & -5 & -9 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & -10 & -18 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -7 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$

$-5x_3 = -10 \Rightarrow$
$x_3 = 2$
Ebenso folgt:
$x_2 = 0{,}5$
$x_1 = -1$</td>
<td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ -1{,}5 & 1 & -0{,}5 & 1 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 9 & -12 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$
Addiert man Zeile II und III erkennt man schon das Ergebnis:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 9 & -12 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Eine ganze Gleichung verschwindet, daher gibt es unendlich viele Lösungen. Weitere Berechnung, falls erforderlich, siehe „Überbestimmte Gleichungssysteme.“</td>
<td>Mit zwei Gleichungen kann man zwei Variablen errechnen. Diese passen dann aber nicht mehr in die dritte Gleichung.

$2\,x_1 + 3x_2 = 16$
$-3x_1 + 5x_2 = 14$
$1\,x_1 + 2\,x_2 = 8$

$2\,x_1 + 3x_2 = 16$
$-3x_1 + 5x_2 = 14$

Ausrechnen wie im zweiten Fall:
$x_1 = 2$
$x_2 = 4$
Probe in dritte Gleichung:
$1\cdot 2 + 2\cdot 4 = 8$
$9 = 8$

Falsch!</td>
<td>Mit zwei Gleichungen kann man zwei Variablen errechnen. Diese passen dann auch in die dritte Gleichung.

$2\,x_1 + 3x_2 = 16$
$-3x_1 + 5x_2 = 14$
$1\,x_1 + 2\,x_2 = 9$

$2\,x_1 + 3x_2 = 16$
$-3x_1 + 5x_2 = 14$

Ausrechnen wie im zweiten Fall:
$x_1 = 2$
$x_2 = 4$
Probe in dritte Gleichung:
$1\cdot 2 + 2\cdot 4 = 9$
$9 = 9$
Richtig!</td>
<td>$2x_1 + 4x_2 = 8$
$x_1 + 2x_2 = 4$
$4x_1 + 8x_2 = 16$

$2x_1 + 4x_2 = 8$
$x_1 + 2x_2 = 4$

$2x_1 + 4x_2 = 8$
$2x_1 + 4x_2 = 8$
Addieren:
$0 = 0$
Setze für
$x_2 = t$

Mit der zweiten Gleichung folgt:
$x_1 + 2t = 4$
$x_1 = 4 - 2t$

Probe in III
$4(4 - 2t) + 8t = 16$
$16 = 16$

Richtig!</td>
</tr>
<tr><td>L = { }</td><td>L = {(-1,5 - 0,5t; t ; 0); t ε R}</td><td>L = {(7+0,5t; 0,5t+2; t); t ε R}</td><td>L = { }</td><td>L = {(-1; 0,5; 2)}</td><td></td><td>L = { }</td><td>L = {(2 ; 4)}</td><td>L = {(4- 2t); t); t ε R}</td></tr>
</table>

Einige Beispiele für Aufgaben, die auf ein Gleichungssystem führen. Wer es vervollständigen möchte, kann mir weitere schicken.			
Aufgabe	Beispiel	Lösungsweg:	Art des Gleichungssystems
Schnittpunkt zweier Geraden im R^2	$g_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $g_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	Gleichsetzen: 1 + 2r = 3 + s 2 + 3r = 2 + 2s 2r - s = 2 3r – 2s = 0 Falls es eine Lösung/Schnittpunkt gibt. Lösung in einer der beiden Geraden einsetzen.	2
Schnittpunkt zweier Geraden im R^3	$g_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $g_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$	Gleichsetzen 5 + 2s = 1 + 2r 5 + s = 3 + 3r 2 + s = 5 + 5r 2s – 2r = -4 s - 3r = - 2 s - 5r = 3	3
Punktprobe in Gerade R^2	$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	Gleichsetzen und schauen, ob für r in jeder Zeile der gleiche Wert rauskommt. 1 = 1 + 2r | -1 => 0 = 2r => r = 0 2 = 2 + 3r | -2 => 0 = 3r => r = 0 Punkt liegt auf der Geraden.	
Punktprobe in Gerade R^3	$A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $g_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	2 = 5 + 2 s => -3 = 2s 3 = 5 + s => - 2 = s 5 = 2 + s => 3 = s Punkt liegt also nicht auf der Geraden.	
Punktprobe in Ebene	$A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $E_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$	Gleichsetzen und schauen, ob für r und s in jeder Zeile der gleiche Wert rauskommt.	3

		2 = 1 + 2r + 7s 3 = 3 + 3r + 3s 5 = 5 + 5r + 7s 2r + 7s = 1 3r + 3s = 0 5r + 7s = 0 Der Punkt liegt also nicht in der Ebene	
Schnittpunkte Gerade Ebene	$g_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	5 + 2s = 2 + 2r + 3t 5 + 1s = 3 + 3r + 2t 2 + s = 5 + 2r + 5t 2s - 2r - 3t = -3 1s - 3r - 2t = - 2 s - 2r - 5t = 3 s ausrechnen und in die Gerade einsetzen.	2
Schnittpunkte zweier Ebenen	$E_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ $E_2: \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	1 + 2r + 7s = 2 + 2t + 3u 3 + 3r+ 3s = 3 + 3t+ 2u 5+ 5r + 7s = 5 + 2t + 5u 2r + 7s - 2t - 3u = 1 3r+ 3s - 3t - 2u = 0 5r + 7s - 2t - 5u = 0 r in Abhängigkeit von s ausrechnen und in die erste Ebene einsetzen oder t in Abhängigkeit von u ausrechnen und in die zweite Ebene einsetzen.	1